Einheitliche Feldtheorie

F. Vollendorf

(Z. Naturforsch. **31 a**, 225–230 [1976]; eingegangen am 14. Februar 1976)

Unified Field Theory

A theory is developed in which the gravitational as well as the electromagnetic field is described in a purely geometrical manner. In the case of a static central symmetric field Newton's law of gravitation and Schwarzschild's line element are derived by means of an action principle. The same principle leads to Fermat's law which defines the world lines of photons.

1. Einleitung

Unter einer einheitlichen Feldtheorie soll eine (klassische) Feldtheorie verstanden werden, in welcher das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld eine untrennbare Einheit bilden.

Die Hauptschwierigkeit, welche der Konstruktion einer solchen Theorie entgegensteht, liegt in dem Problem, die elektromagnetischen Feldgrößen geometrisch zu interpretieren. Die drei bekanntesten Lösungsvorschläge stammen von Weyl [1], Kaluza [2] und Einstein [3]. Die Einsteinsche Theorie des nichtsymmetrischen Feldes wurde vor kurzem von Tautz [4] weiter ausgebaut. Der fünfdimensionale Ansatz von Kaluza hat zu einer ganzen Reihe von weiteren Arbeiten geführt. Eine Übersicht hierüber enthält ein Artikel von Browne [5].

Den drei erwähnten Lösungsvorschlägen ist gemeinsam, daß sie zu einer Verallgemeinerung des Konzeptes einer Riemannschen Geometrie des $(3+1)$-dimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums führen. Die folgenden Überlegungen gehen von einem hierzu entgegengesetzten Standpunkt aus: Das Konzept einer Riemannschen Geometrie des Raum-Zeit-Kontinuums wird nicht als zu beschränkt, sondern als zu allgemein angesehen. Es entsteht also die Frage, ob es einen Typ von Geometrie gibt, welcher nicht so speziell wie die Minkowskische oder die Euklidische, aber auch nicht so allgemein wie die Riemannsche Geometrie ist.

In einer vorangegangenen Arbeit [6] II ist am Beispiel der dort eingeführten verallgemeinerten Schwarzschildschen Metrik gezeigt worden, daß diese Frage positiv zu beantworten ist. Der leitende Gedanke der Arbeit II bestand darin, ausgezeichnete Koordinaten u^ν und u_ν als Feldgrößen anzusehen. Dieser Gedanke wird in veränderter Form auch den folgenden Abschnitten zugrunde gelegt.

Sonderdruckanforderungen an Dr. F. Vollendorf, Clemens-Brentano-Straße 1, *D-3550 Marburg 7.*

2. Das Schraubenfeld

x_λ seien die Koordinaten [7] eines beliebigen Punktes X des Raum-Zeit-Kontinuums. Zwei Systeme von ausgezeichneten Koordinaten

$$u^\nu = u^\nu{}_{(x_\lambda)} \quad \text{und} \quad u_\nu = u_{\nu(x_\lambda)}$$

dienen als die grundlegenden Feldgrößen.

Mit Hilfe der in einer Arbeit [8] I eingeführten acht speziellen Cayley-Zahlen β^ν und β_ν wird ein von den Koordinaten x_λ abhängiger Term

$$u = u_{(x_\lambda)} \quad \text{mit} \quad u_{(x_\lambda)} := \sum_{\nu=0}^{3} (u^\nu \beta^\nu + u_\nu \beta_\nu) \qquad (1)$$

gebildet.

Zur Unterstützung der Anschauung sollen die Werte des Terms $u_{(x_\lambda)}$ geometrisch interpretiert werden. Das geschieht dadurch, daß die drei Elemente β^1, β^2 und β^3 als drei paarweise zueinander senkrechtstehende Rechtsschrauben geometrisch dargestellt werden. Unter einer Schraube soll dabei eine zusätzlich mit einem Drehsinn versehene gerichtete Strecke verstanden werden. Die Elemente β_1, β_2 und β_3 sind dann als zu β^1, β^2 bzw. β^3 parallel liegende Linksschrauben zu interpretieren. Konsequenterweise wird den Elementen β^0 und β_0 die geometrische Bedeutung je einer in zeitlicher Richtung liegenden Rechtsschraube bzw. Linksschraube gegeben. In Verallgemeinerung des hiermit eingeführten Sprachgebrauchs sollen sämtliche Werte des Terms $u_{(x_\lambda)}$ Schrauben genannt werden. Der Term $u_{(x_\lambda)}$ beschreibt demnach ein Schraubenfeld.

Der Übergang von einer Rechtsschraube zu einer Linksschraube und umgekehrt führt zu der folgenden Zuordnung:

$$\mathrm{CP}: u \to \bar{u}, \ \bar{u} := \sum_{\nu=0}^{3} (u^\nu \beta_\nu + u_\nu \beta^\nu) .$$

Die hiermit gegebene Abbildung ist mit der Addition und Multiplikation von reellen Cayley-Zahlen [8] vertauschbar. Darin drückt sich eine grundsätzliche Gleichberechtigung zwischen Links- und Rechts-Schrauben aus. Die geometrische Interpretation der Elemente β^ν und β_ν gibt den in Tab. 7 der Arbeit I aufgeführten Multiplikationsbeziehungen eine anschauliche elementargeometrische Bedeutung. Die wichtigsten sind durch die folgenden Gleichungen gegeben [7]:

$$\begin{aligned} &\beta^l \beta^m = \sum_{n=1}^{3} \beta_n \varepsilon_{lmn}, && \beta_m \beta^n = -\beta^0 \delta_{mn}, \\ &\beta^n \beta^0 = \beta^n, && \beta^0 \beta^n = 0, \\ &\beta^0 \beta^0 = \beta^0, && \beta_0 \beta^0 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch Anwendung der CP-Abbildung erhält man weitere Beziehungen. Die übrigen sind über die Gleichung

$$\beta^0 + \beta_0 = 1 \tag{3}$$

festgelegt. Schließlich soll kurz an die in I angegebenen Definitionen der Spur, der P-Spiegelung und der Determinante erinnert werden:

$$\begin{gathered} \operatorname{Sp} u := \tfrac{1}{2}(u^0 + u_0), \\ P: u \to u^{\mathrm{P}},\ u^{\mathrm{P}} := 2 \operatorname{Sp} u - u, \\ \| u \| := u\, u^{\mathrm{P}} \quad \text{oder} \quad \| u \| = \sum_{\nu=0}^{3} u^\nu u_\nu . \end{gathered} \tag{4}$$

3. Geometrisierung der elektromagnetischen Feldgrößen

Das Schraubenfeld steht in einem engen Zusammenhang mit zwei Arten von ausgezeichneten Koordinatensystemen. Eine Geometrisierung der elektromagnetischen Feldgrößen wird nun dadurch erreicht, daß ein Zusammenhang zwischen dem Schraubenfeld und den vier Komponenten $w_\nu = w_{\nu(x_\lambda)}$ des elektromagnetischen Potentials hergestellt wird. Hierzu wird ein das Schraubenfeld beschreibender Term $u_{(x_\lambda)}$ vorgegeben.

Ein System von Koordinaten x_λ soll zulässig heißen, wenn für die zeitliche Koordinate x_0 die Bedingung

$$x_0 = \operatorname{Sp} u \tag{5}$$

gültig ist. Für ein solches System werden die drei Ausdrücke

$$\Gamma_n := \tfrac{1}{2}\left[(\partial u / \partial x_n) - (\partial \bar{u} / \partial x_n) \right] \tag{6}$$

eingeführt. Es wird vorausgesetzt, daß sie für alle Punkte X des Raum-Zeit-Kontinuums von Null verschieden sind. Die Koordinaten x_n können dann stets so gewählt werden, daß sie für einen beliebig vorgegebenen Punkt X_0 die Werte $x_n = 0$ annehmen und zusätzlich für diesen Punkt die Bedingungen

$$\Gamma_n \Gamma_m + \Gamma_m \Gamma_n = 2\, \delta_{nm}$$

erfüllt sind. Aufgrund der Definition (6) folgt

$$\Gamma_n + \overline{\Gamma}_n = 0 .$$

Durch eine der in einer Arbeit [9] IV untersuchten Dreibeintransformationen kann stets erreicht werden, daß für den Punkt X_0 die Gleichungen

$$\Gamma_n = \Omega_n \quad \text{mit} \quad \Omega_n := \beta^n - \beta_n$$

gültig sind. Für die durch

$$\Gamma_0 := \Gamma_1 (\Gamma_2 \Gamma_3) \quad \text{und} \quad \gamma_n := \Gamma_n \Gamma_0$$

festgelegten weiteren Elemente liefert eine Rechnung die für den Punkt X_0 gültigen Beziehungen

$$\Gamma_0 = \Omega_0 \quad \text{mit} \quad \Omega_0 := \beta^0 - \beta_0$$

und

$$\gamma_n = \omega_n \quad \text{mit} \quad \omega_n := \beta^n + \beta_n .$$

Für eine Umgebung des Punktes X_0 läßt sich nun das durch $u_{(x_\lambda)}$ dargestellte Schraubenfeld stets in der Form

$$u_{(x_\lambda)} = v + w \tag{7}$$

mit

$$v := t + \sum_{n=1}^{3} v_n \Omega_n, \quad w := w_0 \Omega_0 + \sum_{n=1}^{3} w_n \omega_n \tag{8}$$

angeben, wobei t, v_n und w_ν reellwertige von x_λ abhängige Terme sind. Ein Vergleich von (7) und (8) mit (1) liefert das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} &t = \operatorname{Sp} u, && w_0 = \tfrac{1}{2}(u^0 - u_0), \\ &v_n = \tfrac{1}{2}(u^n - u_n), && w_n = \tfrac{1}{2}(u^n + u_n). \end{aligned} \tag{9}$$

Wegen Gl. (5) gilt demnach für ein zulässiges System von Koordinaten x_λ die Gl. (10):

$$t = x_0 . \tag{10}$$

Andere Systeme von Koordinaten x_λ sollen im folgenden nicht betrachtet werden.

Der entscheidende Schritt zur Geometrisierung der elektromagnetischen Feldgrößen besteht nun darin, den Ausdruck w mit seinen vier Komponenten w_ν für eine kleine Umgebung des Punktes X_0 als das elektromagnetische Potential zu interpretieren. Damit lassen sich die sechs Komponenten der elektromagnetischen Feldstärken einführen. Zu diesem Zweck wird der Differentialoperator

$$\partial^{\mathrm{P}} := (\partial / \partial t) - \sum_{n=1}^{3} (\partial / \partial x_n)\, \Omega_n$$

auf das Potential w angewendet. Man erhält

$$\partial^{\mathrm{P}} w = (1+2\,\varphi) + \sum_{n=1}^{3} E_n\,\Omega_n + \sum_{n=1}^{3} B_n\,\omega_n\,, \quad (11)$$

wobei

$$1+2\,\varphi := (\partial w_0/\partial t) - \sum_{n=1}^{3} (\partial w_n/\partial x_n)\,, \quad (12\,\mathrm{a})$$

$$E_n := (\partial w_n/\partial t) - (\partial w_0/\partial x_n) \quad (12\,\mathrm{b})$$

und

$$B_n := \sum_{l,m=1}^{3} (\partial w_l/\partial x_m)\,\varepsilon_{lmn} \quad (12\,\mathrm{c})$$

gesetzt worden ist.

Man erkennt, daß die Variablen E_n und B_n als die Komponenten der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke zu interpretieren sind. Die Überlegungen der folgenden Abschnitte führen zu dem Ergebnis, daß φ die Bedeutung des Newtonschen Gravitationspotentials hat. Die Lorentz-Konvention

$$(\partial w_0/\partial t) - \sum_{n=1}^{3} (\partial w_n/\partial x_n) = 0$$

gilt demnach nur in Gebieten mit konstantem Gravitationspotential.

4. Ein Extremalprinzip für das Schraubenfeld

Die Gln. (12 a) bis (12 c) zeigen, daß bei vorgegebenem Schraubenfeld sowohl das Newtonsche Gravitationsfeld als auch das Maxwellsche Feld eindeutig festgelegt sind.

Es stellt sich das Problem, das Gesetz der zeitlichen Entwicklung des Schraubenfeldes aufzufinden. Zu diesem Zweck werden die Ergebnisse der Arbeit II in einer Form übernommen, welche gegenüber den in IV untersuchten automorphen Abbildungen invariant ist. Als Ausgangspunkt dienen die drei partiellen Ableitungen

$$U_n := (\partial u/\partial x_n)\,.$$

Für ein zulässiges System von Koordinaten folgt

$$\mathrm{Sp}\, U_n = 0\,.$$

Unter Berücksichtigung dieser Bedingung zeigt eine Rechnung, daß der Ausdruck

$$\Delta := \tfrac{1}{2}\, U_1 (U_2\, U_3) + \tfrac{1}{2}\, U_3 (U_2\, U_1) - (U_1\, U_2)\, U_3 \quad (13)$$

sein Vorzeichen ändert, wenn je zwei der Ausdrücke U_n miteinander vertauscht werden. Unter Benutzung dieser Eigenschaft läßt sich nachweisen, daß das Integral

$$L := \int \sqrt{-\|\Delta\|}\; \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}t$$

von der Wahl eines zulässigen Systems von Koordinaten unabhängig ist. Aufgrund der Ergebnisse aus IV ist unmittelbar abzulesen, daß L auch gegenüber automorphen Transformationen invariant ist. Damit erfüllt der Ausdruck $\sqrt{-\|\Delta\|}$ die Bedingungen, welche an eine Lagrange-Dichte zu stellen sind. Man wird auf das Extremalprinzip (14) geführt:

$$\delta \int \sqrt{-\|\Delta\|}\; \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}t = 0\,. \quad (14)$$

Um den Anschluß an die Ergebnisse der Arbeit II zu erhalten, wird für ein zulässiges System von Koordinaten x_λ der Spezialfall zu

$$u_0 = 0 \quad (15)$$

betrachtet. Gleichung (13) reduziert sich hiermit zu

$$\Delta = N\,\beta^0 + Z\,\beta_0\,, \quad (16)$$

wobei N und Z zwei Funktionaldeterminanten sind:

$$N := \mathrm{Det}(\partial u^n/\partial x_m)\,, \quad Z := \mathrm{Det}(\partial u_n/\partial x_m)\,.$$

Benutzt man statt Δ den Ausdruck Δ^{P}, so vertauschen N und Z ihre Rollen. Es bedeutet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn die Gültigkeit der Relation (17) vorausgesetzt wird:

$$|N| \geqq |Z|\,. \quad (17)$$

Die Gl. (16) liefert

$$\sqrt{-\|\Delta\|} = \sqrt{-Z\,N}\,,$$

womit der Anschluß an die in II benutzte Lagrange-Dichte hergestellt worden ist. Damit kann auch das Ergebnis übernommen werden, daß

$$c = \sqrt{-Z/N} \quad (18)$$

als Lichtgeschwindigkeit zu interpretieren ist.

Aus (16) bis (18) folgt

$$c = \sqrt{1+\varepsilon^2} - \varepsilon\,, \quad (19)$$

wobei $\varepsilon := (|\mathrm{Sp}\,\Delta| / \sqrt{-\|\Delta\|})$ gesetzt worden ist. Die hierdurch festgelegten Werte von c sind von der Wahl eines zulässigen Systems von Koordinaten x_λ unabhängig und zusätzlich bei einer automorphen Transformation invariant. Gleichung (19) wird deshalb nicht nur in dem durch Gl. (15) eingeschränkten Spezialfall, sondern für beliebige Schraubenfelder als Gesetz der Lichtgeschwindigkeit angesehen.

5. Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Das Extremalprinzip (14) soll im Spezialfall zu (15) auf ein statisches Schraubenfeld angewendet werden. Es reduziert sich hierfür zu

$$\delta \int \sqrt{-Z N}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3 = 0\,. \tag{20}$$

Die Koordinaten x_n können im statischen Fall so gewählt werden, daß die Gleichung

$$v_n = x_n$$

gilt. Aus (9) ergibt sich dann unter Berücksichtigung von Gl. (15) der folgende Ansatz:

$$\begin{aligned} u^0 &= 2\,t\,, & u_0 &= 0\,, \\ u^n &= w_n + x_n\,, & u_n &= w_n - x_n\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Für die Funktionaldeterminanten folgt

$$N = \mathrm{Det}(w_{n,m} + \delta_{nm})\,, \quad Z = \mathrm{Det}(w_{n,m} - \delta_{nm})\,,$$

wobei die Definition

$$w_{n,m} := (\partial w_n / \partial x_m)$$

benutzt worden ist. Variiert man die drei Potentialkomponenten w_n, so führt Gl. (20) unter Berücksichtigung von (18) auf die folgenden Feldgleichungen:

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \left[c^{-1} \frac{\partial Z}{\partial w_{n,m}} + c \frac{\partial N}{\partial w_{n,m}} \right] = 0\,. \tag{22}$$

Eine hierzu äquivalente Form ist durch Gl. (23) gegeben:

$$\sum_{m=1}^{3} (\partial Z N / \partial w_{n,m})\, (\partial c / \partial x_m) = 0\,. \tag{23}$$

Von besonderem Interesse ist der zentralsymmetrische Fall:

$$w_n = a(r)\, (x_n / r)\,, \quad r^2 := \sum_{n=1}^{3} (x_n)^2\,.$$

Mit Gl. (22) oder (23) folgt durch Nachrechnen, daß a konstant sein muß:

$$w_n = a (x_n / r)\,, \quad (\partial a / \partial r) = 0\,. \tag{24}$$

Die Gln. (12 a) bis (12 c) und (18) nehmen damit die folgende Form an:

$$\begin{aligned} &\varphi = -\,(a/r)\,, \quad E_n = 0\,, \quad B_n = 0\,, \\ &c = (r - a)/(r + a) \quad (\text{für } r \geqq a)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Man erkennt, daß sich der betrachtete Spezialfall auf ein Newtonsches Gravitationsfeld bezieht. a bedeutet hierbei einen Schwarzschildschen Radius.

Ein statisches zentralsymmetrisches Schraubenfeld äußert sich demnach allein als ein Gravitationsfeld. Mit Hilfe der in IV entwickelten gruppentheoretischen Methode läßt sich nachrechnen, daß das Schraubenfeld eines rotierenden Sterns nicht zentralsymmetrisch ist. Als weitere Folgerung ergibt sich, daß rotierende Sterne im Normalfall von einem Magnetfeld umgeben sein sollten. Damit eröffnet sich eine Möglichkeit, die Theorie des Schraubenfeldes empirisch zu prüfen.

6. Bewegung von Photonen im Gravitationsfeld

Es wird angenommen, daß die Lagrange-Dichte $\sqrt{-\|\Delta\|}$ einen Summanden vom Typ einer Delta-Funktion umfaßt. Aus (14) folgt dann für die Bewegung der durch diese Delta-Funktion beschriebenen Singularität des Raum-Zeit-Kontinuums das Prinzip von Fermat:

$$\delta \int \mathrm{d}t = 0\,. \tag{26}$$

Diese Extremalbedingung beschreibt die Bewegung von Photonen. Weiter auswerten läßt sie sich mit Hilfe der durch Gl. (19) eingeführten Lichtgeschwindigkeit c. Zu messen ist c als Quotient eines räumlichen und eines zeitlichen Abstandsdifferentials:

$$c = (\mathrm{d}s / \mathrm{d}t)\,. \tag{27}$$

Damit nimmt Gl. (26) die Form (28) an:

$$\delta \int c^{-1}\, \mathrm{d}s = 0\,. \tag{28}$$

In der euklidischen Näherung ist

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{n=1}^{3} (\mathrm{d}x_n)^2 \tag{29}$$

anzusetzen. Mit Gl. (25) wird man zu der Konsequenz geführt, daß das Licht im zentralsymmetrischen Gravitationsfeld zum Zentrum hin abgelenkt wird. Wie sich leicht nachrechnen läßt, erhält man in der betrachteten Näherung für diese Lichtablenkung das gleiche Resultat, welches auch die Einsteinsche Gravitationstheorie liefert.

Die rechte Seite der Gl. (29) ist nicht von der Wahl des Systems der Koordinaten x_λ unabhängig. Dieser Forderung genügt jedoch die Definition

$$(\mathrm{d}s)^2 := -\,\|\mathrm{d}\boldsymbol{u}\| \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}u := \sum_{\nu=0}^{3} (\mathrm{d}u^\nu \beta^\nu + \mathrm{d}u_\nu \beta_\nu)\,. \tag{30}$$

Damit legt das Schraubenfeld die räumliche (ds)-Metrik fest. Für den speziellen Fall zu (21) erhält man

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{n=1}^{3} [(\mathrm{d}x_n)^2 - (\mathrm{d}w_n)^2]\,.$$

Mit (24) spezialisiert sich diese Gleichung weiter zu

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{n,m=1}^{3} h_{nm}\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_m\,, \tag{31}$$

wobei

$$h_{nm} = [1-(a^2/r^2)]\,\delta_{nm} + (a^4/r^4)\,x_n\,x_m \tag{32}$$

gesetzt worden ist. Für $a=0$ wird man auf den euklidischen Grenzfall (29) geführt.

Aus dem Ergebnis des nächsten Abschnitts folgt, daß für ein zentralsymmetrisches statisches Gravitationsfeld das Fermatsche Prinzip (28) unter Berücksichtigung der Gln. (25), (31) und (32) zu einem Resultat führt, welches exakt mit dem entsprechenden der Einsteinschen Gravitationstheorie übereinstimmt.

7. Die Metrik der Einsteinschen Gravitationstheorie

Das Fermatsche Prinzip (28) soll in einer anderen Form dargestellt werden. Hierzu werden die vier Koordinaten x_λ der Punkte X auf der Weltlinie eines Photons in Abhängigkeit von einem reellwertigen Parameter η angesetzt. Die Ableitung nach η wird durch einen Punkt gekennzeichnet. Statt $(\mathrm{d}s/\mathrm{d}\eta)$ wird $\dot{s}$ geschrieben. Die Gl. (27) kann in leichter Verallgemeinerung durch die Bedingung ersetzt werden, daß

$$k := c\,\dot{t} - \dot{s} \tag{33}$$

eine Konstante der Bewegung ist. Es wird nun die Extremalbedingung

$$\delta \int (c\,\dot{t} - \dot{s})\,(\dot{t} + c^{-1}\,\dot{s} - c^{-1}\,k)\,\mathrm{d}\eta = 0 \tag{34}$$

betrachtet. Setzt man in Gl. (34) anstelle von $\dot{t}$ aufgrund der Gl. (33) den Ausdruck $c^{-1}(k+\dot{s})$ ein, so reduziert sie sich zu Gleichung (28).

Für $k=0$ erhält man das Fermatsche Prinzip. Setzt man dagegen in der Gl. (34) für die Konstante k direkt den Wert 0 ein, so wird man auf das Extremalprinzip (35) geführt:

$$\delta \int [c(\dot{t})^2 - c^{-1}(\dot{s})^2]\,\mathrm{d}\eta = 0\,. \tag{35}$$

Diese Bedingung zeichnet die geodätischen Linien zu einer durch

$$(\mathrm{d}\tau)^2 := c\,(\mathrm{d}t)^2 - c^{-1}\,(\mathrm{d}s)^2 \tag{36}$$

definierten $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik aus.

Die Nebenbedingung (33) ist für $k=0$ der Gl. (37) äquivalent:

$$\mathrm{d}\tau = 0\,. \tag{37}$$

Demnach kann das Fermatsche Prinzip auch in der durch die Gln. (35) und (37) festgelegten Form angesetzt werden. Für das zentralsymmetrische statische Gravitationsfeld erhält man mit (25) und (31) das folgende Ergebnis:

$$(\mathrm{d}\tau)^2 = \frac{r-a}{r+a}\,(\mathrm{d}t)^2 - \frac{r+a}{r-a}\sum_{n,m=1}^{3} h_{nm}\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_m\,. \tag{38}$$

Bei Berücksichtigung von Gl. (32) ist zu sehen, daß durch Gl. (38) die Schwarzschildsche Metrik festgelegt wird.

Weltlinien von Photonen erweisen sich demnach auf der Grundlage des Fermatschen Prinzips bezüglich der $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik als die geodätischen Linien, welche der Nebenbedingung (37) genügen. Damit erhält man völlige Übereinstimmung mit den Gesetzen der Einsteinschen Gravitationstheorie, wenn man die durch Gl. (36) definierte $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik als diejenige der Einsteinschen Gravitationstheorie interpretiert.

Der für eine einheitliche Feldtheorie entscheidende Gesichtspunkt besteht hierbei darin, daß diese $(\mathrm{d}\tau)$-Metrik wegen (19) und (30) durch das Schraubenfeld eindeutig bestimmt wird.

8. Expansion des Weltalls

Die bisherigen Ergebnisse weisen die Theorie des Schraubenfeldes als eine einheitliche Feldtheorie aus. Als wichtigste Leitschnur ihres Aufbaus diente der Gedanke, daß sich grundlegende Gesetze in einer Form darstellen lassen, welche gegenüber den in IV untersuchten automorphen Transformationen invariant ist.

Eine besonders einfache, bisher nicht näher betrachtete Invariante stellt die durch Gl. (4) definierte Determinante des Schraubenfeldes dar. Mit (7) bis (9) folgt

$$\|u\| = \|v\| + \|w\|\,,$$

$$\|v\| = t^2 - \sum_{n=1}^{3}(v_n)^2\,, \quad \|w\| = -(w_0)^2 + \sum_{n=1}^{3}(w_n)^2\,.$$

Es fällt auf, daß sowohl $\|v\|$ als auch $\|w\|$ in der (speziellen) Relativitätstheorie die Rolle von Invarianten spielen.

Auf die einfachste Version der Theorie des Schraubenfeldes wird man durch die Forderung geführt, daß die Determinante von u allgemein den Wert 0 annimmt:

$$\|u\| = 0\,. \tag{39}$$

Diese Bedingung wurde von dem Ansatz (21) für eine durch

$$\sum_{n=1}^{3} (x_n)^2 \ll t^2\,, \quad \sum_{n=1}^{3} (w_n)^2 \ll t^2$$

festgelegte kleine Umgebung des Punktes X_0 näherungsweise erfüllt.

Ein besonders symmetrischer Sonderfall eines Schraubenfeldes ist durch die zusätzliche Bedingung

$$u^{\mathrm{P}} = \bar{u} \tag{40}$$

ausgezeichnet. Für diesen Fall reduziert sich die Gl. (7) zu

$$u = t + w_0\, \Omega_0 + \sum_{n=1}^{3} v_n\, \Omega_n\,.$$

Damit liefern die Gln. (12 a) bis (12 c) und (39) für einen beliebig gewählten Punkt X das folgende Ergebnis:

$$\varphi = 0\,, \quad E_n = 0\,, \quad B_n = 0\,,$$

$$t^2 = (w_0)^2 + (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2\,.$$

Diese Gleichungen stellen ein leeres, mit der Zeit linear expandierendes sphärisches Universum dar. Wenn das Weltall die Symmetrieeigenschaft (40) wenigstens näherungsweise aufweist, sollte es sich in gleicher Näherung als expandierende Sphäre beschreiben lassen.

[1] H. Weyl, Gravitation und Elektrizität, S.B. Preuss. Akad. Wiss. 1918, abgedruckt in der Sammlung Das Relativitätsprinzip, Wiss. Buchges. Darmstadt 1958, S. 147.

[2] Th. Kaluza, S.B. Preuss. Akad. Wiss. 54, 966 [1921].

[3] A. Einstein, Grundzüge der Relativitätstheorie, Vieweg, Braunschweig 1960.

[4] Tautz, Found. Phys. 5, 63 [1975].

[5] P. F. Browne, Found. Phys. 5, 387 [1975].

[6] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. 30 a, 642 [1975]; zitiert als Arbeit II.

[7] Griechische Indizes laufen von 0 bis 3; lateinische Indizes stehen für die Ziffern von 1 bis 3.

[8] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. 30 a, 431 [1975]; zitiert als Arbeit I.

[9] F. Vollendorf, Z. Naturforsch. 30 a, 1510 [1975]; zitiert als Arbeit IV.